PRIMA DIVAGAZIONE

Uno più uno non fa sempre due
Neanche in matematica

> si potrebbero allevare diversi bambini in diversi sistemi di pensiero, far credere ad alcuni che due più due non fanno quattro o che la luna è un formaggio, poi metterli tutti insieme quando avessero venti o venticinque anni
>
> M. Foucault, *Sorvegliare e punire*

Molte persone confondono la matematica con l'**aritmetica**, (dal greco ἀριθμέω, *io conto*), il settore della matematica che spiega come eseguire addizioni, sottrazioni, moltiplicazioni o divisioni.

All'origine di questa confusione ci sono essenzialmente due motivi. Il primo è di carattere storico. L'aritmetica è stata la prima branca della matematica a svilupparsi nel corso della storia dell'umanità: Egizi, Babilonesi, Cinesi sapevano, infatti, far di conto e si servivano di queste abilità per il commercio, l'agricoltura, l'astronomia e tante altre attività.[1] Il secondo motivo è di carattere personale. L'aritmetica rappresenta per tutti il battesimo della matematica. Poi molti diventano atei o non praticanti...

Aritmetica richiama alla mente numeri e calcoli, tabelline e riporti. Regole precise, risultati indiscutibili. Eppure non è così. Non c'è un

[1]cfr. [**Boyer(2000)**], capp. 2, 3, 12

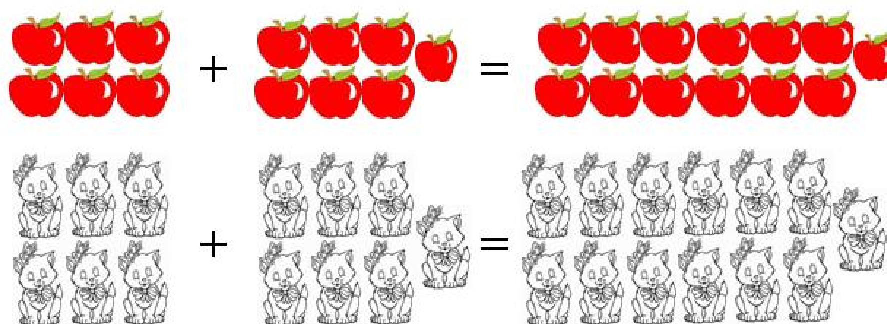


Figura 1. L'aritmetica delle mele e l'aritmetica dei gatti

modo naturale per eseguire le operazioni aritmetiche, non c'è neanche un modo unico per eseguire la somma: la matematica e l'aritmetica sono meno 'esatte' di quanto si pensi...

Aritmetica delle mele e aritmetica dell'orologio

Tutti sono d'accordo che $6 + 7 = 13$. E tutti concordano che il risultato non cambia se sto sommando gatti o mele. Se io compro sei mele e poi ne compro altre sette, in totale ho tredici mele. Non solo. Se compro prima sette mele e poi sei, alla fine ne ho sempre tredici. E le cose non cambiano se sostituisco 6 e 7 con due numeri qualsiasi: vale cioè la **proprietà commutativa**, ossia per ogni coppia di numeri a e b

$$a + b = b + a.$$

Siccome che $3 + 4 = 7$, siamo tutti d'accordo anche sul fatto che

$$6 + (3 + 4) = (6 + 3) + 4.$$

Le parentesi indicano le precedenze. Quindi, se il mio coinquilino compra prima tre mele e poi quattro ed io compro sei mele, abbiamo tredici mele in casa. Il numero di mele non cambia se io compro prima sei mele e poi tre e il mio coinquilino ne compra quattro.

E se sostituissimo 6, 3 e 4 con tre numeri qualsiasi, l'ordine con cui si eseguono le somme non farebbe cambiare il risultato. In linguaggio tecnico si dice che la somma verifica la **proprietà associativa**, cioè per ogni terna di numeri a, b e c:

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

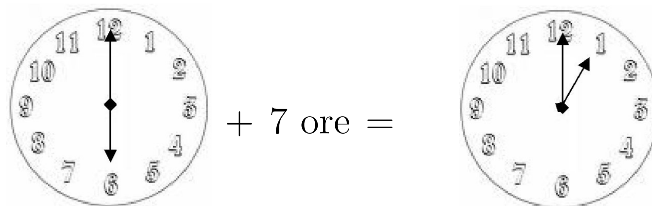


FIGURA 2. L'aritmetica dell'orologio

Bene... $6 + 7$ fa sempre 13. Eppure la seguente frase lascerebbe perplesso chiunque:

> La lancetta piccola del mio orologio segna le ore 6 e
> tra sette ore segnerà le ore 13.

La quasi totalità degli orologi con lancette ha un quadrante che indica i numeri da 1 a 12. Se ora la lancetta piccola segna il numero 6, tra sette ore segnerà il numero 1. Ma allora, quando si parla di orologi con lancette, $6 + 7 = 1$!

Cosa c'è che non va? Se analizziamo le proprietà che la somma ha nell'aritmetica dell'orologio, non troviamo differenze con le proprietà che la somma ha nell'aritmetica delle mele.

Vale la proprietà commutativa: se ora la lancetta piccola segna il numero 6, tra sette ore segnerà il numero 1 e se ora la lancetta piccola segna il numero 7, tra sei ore segnerà sempre il numero 1.

Vale anche la proprietà associativa: se ora la lancetta piccola segna il numero 6, tra sette ore (il risultato di $3+4$) segnerà il numero 1; se ora la lancetta piccola segna il numero 6, tra tre ore segnerà il numero 9 e tra altre quattro ore segnerà ugualmente il numero 1.

Il problema sembra chiaro. Dopo le 12 il contatore delle ore va azzerato. In matematica si parla in questo caso di **aritmetica modulare**. L'aritmetica dell'orologio a lancette è un'aritmetica modulo 12. Dodici ore equivalgono ad un giro completo compiuto dalla lancetta piccola. Così, qualunque sia la sua posizione di partenza, dopo dodici ore la lancetta piccola è tornata in quella stessa posizione e 12 è il numero più piccolo di ore per cui questo accade. Scriviamo

$$12 = 0 \pmod{12}$$

e leggiamo 12 uguale (o congruo) 0 *modulo* 12.

Nel nostro modo di misurare il tempo si possono ritrovare altri esempi di aritmetica modulare: ogni sessanta minuti il contatore dei minuti si azzera ed ogni sessanta secondi il contatore dei secondi si azzera. In questo caso si parla di aritmetica modulo 60.

Proviamo a ragionare modulo 2. Un esempio di aritmetica modulo 2 è l'aritmetica dell'interruttore. Due sole azioni sono possibili: possiamo premere o non premere l'interruttore. Se premiamo l'interruttore, qualcosa cambia: la luce da spenta diventa accesa o viceversa. Se non premiamo l'interruttore, non cambia nulla. Ma se premiamo due volte l'interruttore in sequenza, ci ritroviamo nella situazione iniziale. Proprio come quando sommo 12 ore nell'aritmetica dell'orologio.

Per ragionare modulo 2 bisogna, dunque, pensare al numero 2 come al numero 0. Vale cioè l'uguaglianza (a prima vista inconcepibile)

$$2 = 0 \pmod 2.$$

Ma se $2 = 0 \pmod 2$, abbiamo che $3 = 2 + 1 = 0 + 1 = 1 \pmod 2$. Anzi tutti i numeri pari sono uguali a 0 modulo 2 e tutti i dispari sono uguali a 1 modulo 2. Per convincersi basta pensare che se spingiamo l'interruttore un numero pari di volte non cambia niente, se lo spingiamo un numero dispari di volte luce da accesa diventa spenta o viceversa. Quindi, di tutti i numeri rimangono solo 0 e 1 nell'aritmetica modulo 2. E quanto fa $1+1$ modulo 2? Con rapidità e decisione scriviamo

$$1 + 1 = 2 = 0 \pmod 2.$$

Incredibile! Pensare che uno più uno faccia sempre due, come accade nell'aritmetica delle mele, è sbagliato: nell'aritmetica degli interruttori fa zero!

Interpretando 1 come l'insieme formato dal solo numero 1 e la somma come unione insiemistica si ha che $1 + 1 = 1$, ma non c'è bisogno di scomodare la teoria degli insiemi per avere un esempio di come uno più uno a volte faccia uno... Basta pensare alle elezioni politiche: a volte accade che un partito che ha preso più del 3% alle precedenti elezioni si allei con due partiti che insieme hanno preso più del 3% alle stesse elezioni e che tutti e tre i partiti, ora finalmente riuniti sotto un meraviglioso simbolo unitario, raggiungano solo il 3% alle nuove elezioni e rimangano allegramente fuori dal Parlamento...

Aritmetica dei debiti e dei crediti

Abbiamo scoperto che sommare due numeri non dà sempre lo stesso risultato e questo vi ha lasciati un po' esterrefatti. Abbiamo scoperto che ciascuno di noi, senza accorgersene, usa giornalmente l'aritmetica modulare per semplici calcoli e questo, forse, vi ha stupito ancor di più. Come è possibile che siamo in grado di eseguire semplici somme usando regole di un'aritmetica quasi sconosciuta?

Una possibile risposta io l'azzardo: anche se danno risultati diversi, la somma nell'aritmetica modulare e la somma nell'aritmetica imparata a scuola verificano le stesse proprietà, e questo le rende ai nostri occhi ugualmente naturali (o ugualmente difficili) da utilizzare.

Abbiamo già visto come la somma nell'aritmetica delle mele e la somma nell'aritmetica dell'orologio godano delle proprietà associativa e commutativa. Allarghiamo ora i nostri orizzonti e vediamo quali altre proprietà entrambi i modi di sommare verificano, anche se rispondere a questa domanda richiede l'introduzione di un po' di formalismo e la distinzione tra numeri naturali e numeri interi.

In quella che abbiamo chiamato aritmetica delle mele, i numeri possibili sono quelli appartenenti all'insieme

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

che corrispono a 0 mele, 1 mela, 2 mele, 3 mele e così via. Questi numeri sono chiamati **numeri naturali**. L'insieme dei naturali è infinito perché contiene lo 0 e, per ogni numero n, contiene il numero successivo $n+1$. Il matematico tedesco Leopold Kronecker (1823-1891) affermava che i naturali sono opera di Dio, mentre tutto il resto della matematica è opera dell'uomo. Quel che sembra certo è che nel nostro cervello è codificato un qualcosa che il neuroscienziato cognitivo Stanislas Dehaene ha chiamato senso del numero, su cui si fonda 'il concetto umano di numero [...] quale proprietà caratteristica di oggetti fisici distinti'.[2]

La somma nell'aritmetica dei naturali possiede un'operazione inversa, la sottrazione: se $6 + 7 = 13$ allora $13 - 7 = 6$. C'è, però, una differenza tra somma e sottrazione: la somma di due numeri naturali si può sempre fare, mentre la sottrazione si può fare solo se il secondo

[2] [**Devlin(2002)**] pag. 58



FIGURA 3. Naturali ed interi

numero non è più grande del primo. Ad esempio, $3 - 5$ non ha senso nei naturali: a un negoziante cui sono rimaste solo tre mele, non posso chiedergliene cinque.

E se invece di mele parlassimo di soldi? Mettiamo di dovere tre euro al fruttivendolo per l'acquisto di tre chili di mele. Se gli porgiamo cinque euro, il fruttivendolo difficilmente ci dirà indispettito: "$3-5$ nei naturali non si può fare!" Molto più probabilmente prenderà le cinque euro e ci porgerà due euro di resto.

Dal punto di vista del fruttivendolo abbiamo che 3€ di **credito** nei nostri confronti meno 5€ di credito (date da noi) fanno 2€ di **debito** nei nostri confronti. Se mettiamo il segno '$+$' quando gli euro sono a credito ed un segno '$-$' quando sono a debito, vediamo come nell'aritmetica degli euro, o meglio dei debiti e dei crediti valga l'espressione

$$(+3) - (+5) = (-2).$$

I numeri appartenenti all'insieme

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2 - 1, 0, +1, +2, +3, \ldots\}$$

sono detti **numeri interi** perché possiamo scriverli senza l'ausilio della virgola. Il simbolo $\mathbb{Z}$ deriva dalla parola tedesca 'Zahl', 'numero'. L'insieme dei numeri interi è infinito: contiene lo 0, gli interi positivi (i numeri col segno '$+$') e gli interi negativi (i numeri col segno '$-$').

L'aritmetica degli interi si può identificare a ben diritto con l'aritmetica dei debiti e dei crediti. Numeri negativi per indicare debiti e numeri positivi per indicare crediti erano usati per la contabilità in India sin dal VII secolo.[3] In Europa dobbiamo attendere la fine del XV sec. per veder comparire i segni '$+$' e '$-$' in un libro di aritmetica, il *Rechenung auf allen Kauffmannschaft* di Johann Widmann, libro

[3]cfr. [**Gullberg(1997)**]

(neanche a dirlo) destinato ai commercianti,[4] e altri due secoli perché tutta la comunità matematica accetti senza più riserve la possibilità di eseguire operazioni matematiche con quantità negative.[5]

Torniamo alla nostra indagine e vediamo che relazione c'è tra interi e naturali.

E' facile rendersi conto che sommare i due interi positivi $(+6)$ e $(+7)$ o sommare i due naturali 6 e 7 è la stessa cosa. La somma nell'aritmetica degli interi è una estensione della somma nell'aritmetica dei naturali. Pertanto, gode anch'essa della proprietà associativa e di quella commutativa, cioè $[(a+b)+c = a+(b+c)]$ e $[a+b = b+a]$, qualsiasi valore intero positivo o negativo si dia ad a, b e c.

Cerchiamo allora di capire quali altre proprietà possiede la somma nell'aritmetica degli interi e poi vediamo se anche la somma nell'aritmetica modulare possiede le stesse proprietà aggiuntive.

Come visto i numeri interi si possono ripartire in tre insiemi disgiunti (senza elementi in comune): l'insieme degli interi positivi, l'insieme degli interi negativi e l'insieme costituito dal solo numero 0. Quest'ultimo è un numero particolare perché per la somma è come se non ci fosse, è un **elemento neutro**. Vale a dire che, per ogni intero a,

$$a + 0 \,=\, a.$$

Dato un intero a, l'intero a' che sommato ad a dà l'elemento neutro si chiama **inverso** di a **rispetto alla somma** o, più brevemente, **opposto** di a. In sostanza

$$a + a' \,=\, 0.$$

L'esperienza ci insegna che

- l'opposto di 0 è lo stesso 0;
- l'opposto di $(+6)$ è (-6) e, più in generale, l'opposto di un intero positivo è l'intero negativo che si ottiene sostituendo il segno '$+$' con il segno '$-$';

[4]cfr. [**Boyer(2000)**], pag. 325

[5]Gli antichi greci non concepivano i numeri negativi perché associavano i numeri a lunghezze di segmenti e 'per circa duemila anni il peso della tradizione geometrica della Grecia ritardò l'inevitabile evoluzione del concetto di numero e di calcolo algebrico' ([**Courant and Robbins(2000)**], pag. 30)

- l'opposto di (-8) è $(+8)$ e, più in generale, l'opposto di un intero negativo è l'intero positivo che si ottiene sostituendo il segno '$-$' con il segno '$+$'.

Tutti gli interi hanno un opposto e questo opposto è unico. Inoltre, l'opposto dell'opposto di un numero è il numero stesso.

Consideriamo ora l'aritmetica modulare. In quella che abbiamo chiamato aritmetica dell'orologio, i numeri possibili sono solo dodici e cioè

$$\{0, 1, 2, \ldots, 11\}.$$

Ricordiamo che 0 e 12 rappresentano lo stesso numero perché $12 = 0 \pmod{12}$. Abbiamo già visto come la somma modulo 12 verifichi la proprietà commutativa e quella associativa. Ora ci chiediamo se esiste un elemento neutro e se ogni elemento ha un inverso rispetto alla somma modulo 12, ossia ci chiediamo se la somma modulo 12 (che ha bacino d'utenza un insieme finito di soli dodici elementi) ha le stesse proprietà della somma negli interi (che ha bacino d'utenza un insieme infinito di numeri).

La prima domanda è facile: il numero 0 appartiene all'insieme degli interi modulo 12 e funge da elemento neutro anche nella somma modulo 12. Se sono passate 0 ore, vuol dire che le lancette dell'orologio non si sono mosse.

Passiamo alla seconda. L'inverso rispetto alla somma di un intero modulo 12 è quell'intero che sommato al primo dà 0, ovvero l'elemento neutro (controllate la definizione nel caso della somma negli interi se non siete convinti).

Facciamo un esempio. L'orologio segna le ore 5 ed invece è mezzanotte. Ho due possibilità: posso spingere avanti le lancette di sette ore oppure posso spingere indietro le lancette di cinque ore. In entrambi i casi l'orologio segnerà l'ora giusta. Visto che 12 equivale a 0 nell'aritmetica modulo 12, abbiamo ottenuto le seguenti relazioni:

$$5 + 7 = 0 \pmod{12}$$
$$5 + (-5) = 0 \pmod{12}.$$

5 ha dunque un inverso. Anzi sembra averne addirittura due!

In realtà, solo 7 appartiene all'insiemi degli interi modulo 12 ed è l'**unico** inverso di 5 rispetto alla somma modulo 12. E allora perché

anche (-5) sembra un inverso di 5? Semplicemente perché (-5) e 7 rappresentano lo stesso numero modulo 12. Infatti,

$$7 = 12 + (-5),$$

ma siccome 12 equivale a 0 nell'aritmetica modulo 12, vale che

$$7 = 12 + (-5) = 0 + (-5) = -5 \pmod{12}.$$

L'inverso di 5 rispetto alla somma modulo 12 è, dunque, 7. In genere, l'inverso di un intero modulo 12 è il suo complemento a 12.

Se sostituiamo 12 con un generico intero positivo n, possiamo ripetere per la somma modulo n (che ha come bacino di utenza l'insieme finito formato dagli n numeri $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$) le considerazioni appena effettuate per la somma modulo 12. E cosa otteniamo? Otteniamo che 0 è elemento neutro anche in questo caso e che l'inverso di un intero modulo n rispetto alla somma modulo n è il suo complemento a n.

Qual è, quindi, l'inverso di 2 nella somma modulo 4? E qual è l'inverso di 20 nella somma modulo 35?

[Risposte: L'inverso di 2 nella somma modulo 4 è 2 perché $4 - 2 = 2$. Infatti, $2 + 2 = 0 \pmod 4$, e quindi due più due può far zero anche se la luna non è un formaggio... L'inverso di 20 nella somma modulo 35 è, invece, 15 perché $35 - 20 = 15$.]

Quindi, la somma nell'aritmetica dell'orologio verifica le stesse proprietà verificate dalla somma nell'aritmetica degli interi, benché i numeri interi siano infiniti e i numeri possibili nell'aritemetica dell'orologio siano solo dodici. La stessa cosa si può dire della somma nell'aritmetica modulo n, per qualsiasi intero positivo n.

Tiriamo le somme

In questa divagazione abbiamo visto che non c'è un modo 'naturale' di definire l'operazione somma. Anche noi siamo abituati ad usarne diversi. Se andiamo a fare la spesa ne usiamo uno, se guardiamo l'orologio ne usiamo un altro, se accendiamo e spegniamo la luce un altro ancora (senza accorgercene). E li usiamo tutti con la stessa naturalezza (o con la stessa difficoltà). Questo perché **la somma nell'aritmetica degli interi**, che ci aiuta a fare la spesa e a capire la differenza

tra debiti e crediti, e **la somma nell'aritmetica modulare**, che ci aiuta a ragionare con le ore, i minuti, i secondi o a capire come funziona un interruttore, danno risultati diversi, ma godono delle **stesse proprietà fondamentali** (esistenza di un elemento neutro, esistenza dell'inverso di ogni elemento, proprietà associativa, proprietà commutativa). Tenete a mente questo risultato che sarà richiamato in seguito, intanto...

...la prossima volta che qualcuno vi dice che uno più uno fa sempre due sapete come metterlo KO.

Commons' Lab, Perugia, 4 Febbraio 2010

Bibliografia

[Boyer(2000)] Boyer, C. B., 2000: *Storia della matematica*. Mondadori; Tradotto dall'inglese *A History of Mathematics* (1968).

[Courant and Robbins(2000)] Courant, R. and H. Robbins, 2000: *Che cosa è la matematica?* Bollati Boringhieri, Serie Scientifica; Tradotto dall'inglese *What is Mathematics? An elementary approach to Ideas and Methods* (1969).

[Devlin(2002)] Devlin, K., 2002: *Il gene della matematica*. Mondolibri; Tradotto dall'inglese *The Math Gene* (2000).

[Gullberg(1997)] Gullberg, J., 1997: *Mathematics: From the Birth of Numbers*. W.W. Norton & Co. Inc.